流体の力学の基礎

三重大学･大学院生物資源学研究科
共生環境学専攻
地球環境気候学研究室
教授　立花義裕

イントロ

- 「ゆく河の流れは絶えずして、しかももとの水にあらず。淀みに浮ぶうたかたは、かつ消え、かつ結びて、久しくとどまりたる例なし。世の中にある人と、栖とまたかくのごとし。」（方丈記、鴨長明）
- 美しい地球大気の流れ。海洋の流れ。海氷の流れ。川の流れ。水道管やガス管の水やガスの流れ。血管の中の血液の流れ。野球や卓球の玉がカーブしたりする運動。鉄で出来ている飛行機が飛ぶこと。
- ラッシュ時の人の流れ、車の流れ、お金の流れ。ファッション等の流行。インフルエンザの流行。政局の流れ。
- 銀河の流れ。氷河の流れ、溶岩やらマントルの流れ。
- これらの生業を理解したい。どんな仕組みで動くのだろうか？

- 気体、液体などを総称して、流体と呼ぶ。
- これの流れの仕組みを理解するためには、流れを支配する法則をまず知ることである。
- 流体と雖も、気まぐれで動く人間とは違い、所詮、「物質」である。
- 従って流体も、物質の運動を支配する法則である、ニュートンの運動の法則に従う。
- ところが、流体は、これまで勉強してきた質点や、剛体とは見た目がだいぶ異なる。質点と違い、「大きさ」がある。
- 剛体にも「大きさ」があるけれど、剛体は、その「大きさ」を構成する部分は一心同体で「形」を崩さずに動いていた。流体は、ある部分は右に動き、ある部分は左に動いたりして、「形」が変わったりして、より複雑な感じがする。
- 大気のような気体は、空間にまんべんなくひろがっていて、「大きさ」や「形」ってのも認識しにくい。
- 流体と似た者同士に、弾性体というのがある。ゴムの様なものが一例。流体と弾性体などを総称して、連続体と呼ぶ。要するに、空間に物質が連続的に詰まっていてそれが一つの「体」をなしている状態の様態のことである。
- そして、両者に共通な力学を連続体力学と呼ばれている。
- 連続体といえでも、所詮分子の集まりである。分子は非常に小さい「物質」であるから、質点の運動方程式をその分子の個数分用意すれば、流体の運動も記述出来そうである。
- しかし、その数は膨大であり、それは実質的に無理である。従って、ニュートンの運動方程式の取り扱いが質点の場合といささか異なっている。

- この講義の第一の目標は、流体の流れを支配する法則を導くことである。
- 最初に到達目標を掲げた方が見通しをつけやすいので、支配方程式の一つである、流体の運動方程式をまず記したい。
- その前に復習。運動方程式は、$m\boldsymbol{a} = \sum \boldsymbol{F}$ であった。左辺が結果を表し、右辺はその原因である。つまり、原因である力が全てわかれば、結果として起こる運動の変化が予測できる、ということをこの式は謳っている。
- 流体も同じ流儀で左辺には「結果」、右辺には、原因である「力」を書く。
- 左辺もくせ者であるが、右辺の「力」もこれまたくせ者である。流体にはいろいろなタイプの「力」が作用しているので、かなり長くなる。
- 次がその運動方程式である。これはナビエ・ストークスの方程式と呼ばれている。

流体の運動方程式(Navior-Stoksの方程式)

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{U} - \nabla\Phi$$

$\vec{U}$: 速度ベクトル

$$\vec{U} = (u\vec{i} + v\vec{j} + w\vec{k})$$

t : 時間　ρ : 流体の密度

P: 気圧　μ : 粘性係数

Φ: 重力ポテンシャル

∇: ナブラ

$$\nabla = \left(\vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

Δ : ラプラシアン

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)$$

∇P: グラジエント P(grad P)

$$\nabla P = \left(\vec{i}\frac{\partial P}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial P}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial P}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla P + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{U} - \nabla\Phi$$

$\frac{D\vec{U}}{Dt}$:ラグランジェ微分(物質微分)

$$\frac{D\vec{U}}{Dt} = \underset{\downarrow\ \text{オイラー微分}}{\frac{\partial\vec{U}}{\partial t}} + \underbrace{u\frac{\partial\vec{U}}{\partial x} + v\frac{\partial\vec{U}}{\partial y} + w\frac{\partial\vec{U}}{\partial z}}_{\text{移流項}}$$

移流項 $= (\vec{U}\nabla)\vec{U}$

$$= (u, v, w)\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$$

$-\frac{1}{\rho}\nabla P$:圧力傾度力

$$\left(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}, -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\right)$$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}\vec{j} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}\vec{k}$$

$\frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{U}$:粘性力

$\nu \equiv \frac{\mu}{\rho}$:動粘性係数

$-\nabla\Phi$:重力

$\nabla\Phi = gz$ と書ければ $-\nabla\Phi = (0, 0, -g)$

加速度 = 圧力傾度力 + 粘性力 + 重力

$$m\alpha = m\frac{d\vec{U}}{dt} = F_1 + F_2 + F_3$$

- なお、x, y, z, t は座標を表している。μ が流体の種類で決まる定数、Φは、重力gで表すことが出来る定数。
- その他全ては時間tと場所（x,y,z）で刻一刻と変わる変数である。つまり、（x,y,z,t）の４変数の関数ということである。その他全てとは、u,v,w, ρ 、P のことである。
- つまり、これら5つの値の時空変化の予知をこの方程式は示唆しているのである。つまり、未知数が5つということである。
- 予知が可能なのであれば、これは大変ありがたい方程式ということになる。森羅万象をお見通しな「神様」のような方程式である。大変重要なので、神棚に供えて祀っておきましょう。
- ところが、方程式は、一本しかない（ベクトルをスカラーでばらすと、3成分に分けられるので、正確には3本）。式の数が3本で、未知数が5個なので解けないではないか。
- 実は、流体を支配する方程式は他にもあるので、心配無用。それは後ほど紹介するので、それまでのご辛抱。
- **まずは、この方程式の各項の物理的意味を徹底的に理解することから始めよう。**
- 最初は右辺第一項。

圧力傾度力（イントロ１）

- 圧力傾度力を理解する前に、圧力とは何か？を理解しておかないと始まらない。
- もっとその前に、流体に働く力を、体積力と面積力というタイプに分けると頭が整理しやすいかもしれない。重力や、電気力などは体積力である。圧力は面積力である。
- さて、圧力の話しに戻そう。物体に個々の気体分子は、ランダムに運動しているので、その分子が、壁という固体に衝突すると壁は力を受ける。分子1個1個の力は小さいが、それがアボガドロ数くらいたくさんあると、たくさんの分子がぶつかることになるので、相当な力になるであろうということは、容易に想像できるであろう。これが微視的に見た「気体の圧力」の源である。
- ただ、ここではそのような見方で圧力を考えることはせずに、巨視的に圧力を考えよう。ここでは、応力という概念を導入して、圧力を定義しよう。
- 応力とは、単位面積に働く力のことである。この場合、流体よりも固体（弾性体）を考えた方がイメージがしやすいので、しばらく弾性体のつもりで話しを進める。
- 応力には、二種類あって、剪断応力（接線応力）と法線応力（圧力、張力）がある。それぞれが何者か？についての詳細は、教科書（79-89付近）をご覧頂きたい。講義ではそれにある程度沿って説明する。
- 教科書には、応力は、9個もあって、それを並べたものを応力テンソルという。あるいは、歪みと応力の関係から、ヤング率とかポアソン比などをx,y,z座標に分けて詳細に書かれている。図形やサインコサインなどが得意な学生には理解がたやすいと思うが、立体概念を築くのが苦手な学生は、かるく読み飛ばしても致命傷とはならないので、そんなもんか——。という程度の理解でとりあえず十分である（流体の粘性を考察するときにもう一度ここに戻ることになるので、そのときにはがんばろう）

圧力傾度力（イントロ2）

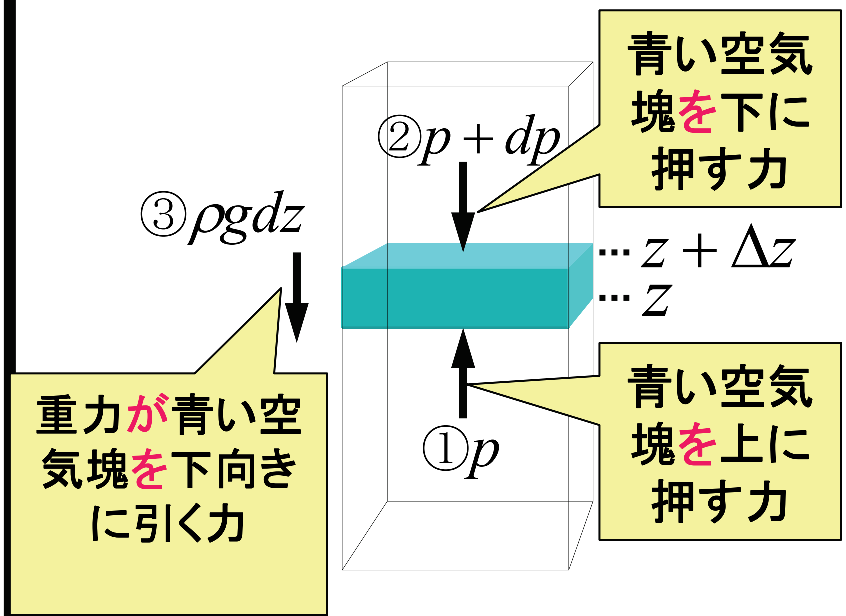
- 教科書にない解説をちょっとだけ以下に付加する。粘性の無い流体（非粘性流体と呼ぶ、イメージとしては「どろどろしていない流体」）では、剪断応力はゼロである。
- 粘性のある流体の場合は、剪断応力は、変形速度が存在すると応力が生じる。一方弾性体は、変形そのものがあれば応力が生じる。粘性流体でも静止あるいは、まったく同じように一体で動いている流体部分では、どんなにどろどろした粘性流体でも剪断応力はゼロである。
- もう一つおまけに捕捉説明。圧力は同じ場所（同じ点）では、どの向きの圧力も同じ大きさである。
- 例えば、大気の圧力は1気圧である。我々はこの圧力で押されているのである。
- 下向きに押されているということは、上方にある空気が地面を押している様なイメージを抱くことが出来るので、何となくわかりやすい。しかし、それは、頭のてっぺんに対してのみ下向に「だけ」働いているわけではなく、僕らの体の皮膚の表面のあらゆる方向に働いているのである。あるいは、大学の屋上に下向きに働いているだけではなく、窓に向かっても横向きに大気圧という圧力が働いているのである。その証明も教科書に書かれているので、しっかりと理解して欲しい。（講義では省略する）

静水圧方程式

青い空気塊の力学を考える。

運動方程式は $\dfrac{dW}{dt} = \Sigma F$

青い空気塊に働く力を
全て書いて見ると･･･



今、青い空気塊は止まったまま
浮かんでいるので

・加速度　0

$$\boxed{\therefore \frac{dW}{dt} = \Sigma F = 0}$$

①−②−③＝0

$$p - (p + dp) - \rho g dz = 0$$

$$-\rho g dz - dp = 0$$

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \quad \leftarrow ④$$

静水圧方程式（静力学方程式）

静水圧方程式は
加速度がゼロで
あればよいのだから
鉛直流Wがあっても
成り立つ。


1992.11.25 Big
CUP NOODLE
CURRY
カップヌードル カレー
CUP NOODLE
CURRY
カップヌードル カレー

圧力傾度力

左面に働く力　　P1ΔyΔz

右面に働く力　−P2ΔyΔz

よって右記立方体に働く力は

$$P_1\Delta y\Delta z - P_2\Delta y\Delta z = (P_1 - P_2)\Delta y\Delta z$$

質量Mは $M = \rho\Delta x\Delta y\Delta z$ であるから

$$M\frac{du}{dt} = M\frac{d^2x}{dt^2} = \rho\Delta x\Delta y\Delta z\frac{du}{dt}$$
$$= (P_1 - P_2)\Delta y\Delta z$$

単位質量を考えて

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\rho}\frac{P_1 - P_2}{\Delta x} = -\frac{1}{\rho}\frac{P_2 - P_1}{\Delta x}$$

$P_2 - P_1 = \Delta P$とおくと　$\Delta x \to 0$

$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\Delta P}{\Delta x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

同様に

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} \qquad \frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

よって、気圧傾度力F_Pは

$F_P = -\frac{1}{\rho}\nabla P$と書くことが出来る

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)$$

i, j, kはx, y, z方向の単位ベクトル