流線・流跡線・渦線・渦管・渦糸の直感的理解

三重大学・大学院生物資源学研究科
教授・立花義裕
2012 年 9 月 23 日

流れを視覚的に感じるための量

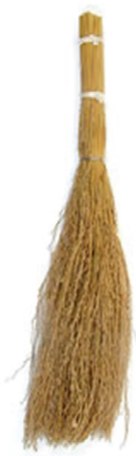
- **流線**（ある時の流れのスナップショット、流れのオイラー的な線）
  例：これまでのいくつかの練習問題で作図した矢印を結んだ線が流線に相当する。
- **流跡線**（ラグランュ的に流れを追う線）
  定常流なら、流線と流跡線は一致する。非定常流では一致しない。これは福島の原発からの放射能の流れがそのときの流線（つまりそのときの風ベクトルの分布）と異なっていたという全国民がしることとなった事実からも容易に理解できると思う。なぜかというと、原発が爆発した瞬間の放射能はその時点での大気の流れに沿って流れるが、その次の時刻（例えば 1 時間後）には大気の流れのベクトル分布は変わっているから、1 時間後の以降の放射能は 1 時間後の流れ分布の沿って流れるわけである。簡単な例をあげる。最初にすべての場所で南風（北向きの流れ）が吹いていれば、流線の向きは北向きで一様となる。1 時間後に風向が西向きに変わったとしよう。そうすると、北に向かった放射能はその向きを西に変えから、流跡線は、北向きから西向きに左に曲がった矢印となる。これは北向きの流線とは明らかに異なる。
- **流線関数**（流れの渦成分が見える）
  数式は省略するが、流線と「ほぼ同等」の線を表す関数。流線関数で描かれる線の本数が多い場所（線が込んでいる場所）ほど流速が大きい（比例する）。また、流れの方向は線の向きと平行。従って、流線関数で描かれた線を見るだけで、流速の大きさと流れの方向の両方が視覚的に分かる。なお流線関数の複数の線は合流も分離もしない。天気図が好きな人は、天気図用の等圧線が流線関数と似た線であると思っていただければよい。風は等圧線とほぼ平行に吹き、風速は等圧線が込んでいるところで強い。

渦を視覚的に感じるための量

- **渦線**
  渦度ベクトル $\boldsymbol{\omega}$ は、$\boldsymbol{\omega} = rot\mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v}$ であった。渦度は場の量なので、速度ベクトルのように空間上の各点に渦度の矢印を描くことができる。このとき、$\boldsymbol{\omega}$ ベクトルの矢印を結んだ曲線を渦線という。渦度ベクトルは、渦の回転の軸方向を向いているので渦線に沿った向きが渦の軸というイメージをもてばよい。数珠をイメージするとわかりやすい。数珠を結んでいるヒモが渦線、それぞれの珠は、ヒモを軸として回転していると思えばよい。その回転が渦巻きのイメージ。流線関数と同じように、渦線が混み合っている場所ほど、渦度が大きい。

- 渦管

  複数の渦線が集まって、管状をなしているとき、その渦線群の束を渦管と呼ぶ。図のような藁の一本一本が渦線、その束が渦管と見なせばわかりやすいと思う。右の図では渦度ベクトルは上を向いているというイメージなので渦巻きはこのほうきの周りをぐるぐると回っているというイメージ。この場合は上ほど渦線が混み合っているので、下では渦度が小さく上では渦度が大きい。



- 渦糸

  非常に細い渦管のことを渦糸と呼ぶ。

渦管の強さ

　下ほど管が広くなっている右図のような渦管を考える。図のように渦管を一周する閉曲線を任意に二つとり、それらを C,C'とする。そして、AA'C'CA'CA を結ぶ微妙な形の閉曲線を考え、この経路に沿った一周積分である循環を計算してみる。藁ぼうきの写真からも直感的に分かるように、渦線が側面から外側に出ることは無いので、この面を貫く渦線はあり得ない。渦線の向きと渦度ベクトルの向きは同じであることは渦線のところで説明したので、この閉曲面を貫く方向の渦度はゼロである。従ってストークスの定理から、この閉曲線上の循環はゼロ。AA'線上では逆方向に 2 回同一経路上で積分しているので、その経路上での積分値はキャンセルし合うのでこの部分の線積分の合計はゼロ。従って、のこった部分である、環 C と環 C'上の線積分の和がゼロで無ければならない。図から、円 C と円 C'は逆回りに積分しているので、同一方向周りでの円 C と円 C'での一周積分は等しくならなければならない。ここでの議論は、閉曲線は任意であったので、渦管のどの場所でも循環 C は変わらない。

　再びストークスの定理を用いると、$C = \int_s \nabla \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_s \boldsymbol{\omega} \cdot d\mathbf{s} = \overline{\omega} S$ となる。$\overline{\omega}$ は渦度の大きさの平均値、S は管の断面積をあらわす。このような渦管内部の平均の循環を渦管の強さと呼ぶ。そしてそれは一定となる。半径が大きい場所（上の図のほうきでは、広がっているところ）は断面積が大きいので、渦度は小さくなり、半径が小さいところ（上の図では とって の部分）では、渦度が大きくなる。このように、角運動量の保存則とよく似た関係が得られる。